



# TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

## Ingeniería de Telecomunicación (4º, 2º c)

Unidad 7ª: Métodos Analíticos, Semianalíticos y Máquina

Aníbal R. Figueiras Vidal

Jesús Cid Sueiro

Ángel Navia Vázquez

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones  
Universidad Carlos III de Madrid



## Métodos analíticos, semianalíticos y máquina

Como se sabe:

- Cuando hay un conocimiento suficiente de la “física” del problema, se dispondrá de la información estadística precisa para, minimizando un coste, obtener el diseño completo del estimador o decisor: incluyendo arquitectura y parámetros; es el caso de los **métodos analíticos**.
- Cuando no lo hay, una opción es elegir una “máquina” con la adecuada capacidad expresiva y proceder a entrenarla (con ejemplos etiquetados) para que “aprenda” a resolver el problema (con la conveniente generalización). Esta es la **metodología máquina**.



Una tercera opción es recurrir a los **métodos semianalíticos**: es decir, estimar, a partir de observaciones o experimentos, la información analítica que falta, y realizar el diseño a partir de esta estimación.

Tal información analítica puede ser:

- las probabilidades “a priori” de las hipótesis. Una posibilidad inmediata es etiquetarlas como frecuencias relativas: discutiremos posteriormente otras opciones;
- la ddp de la va a estimar,  $p(s)$ ; o/y:
- las verosimilitudes, que son también ddp (para cada hipótesis, para cada valor de  $s$ );

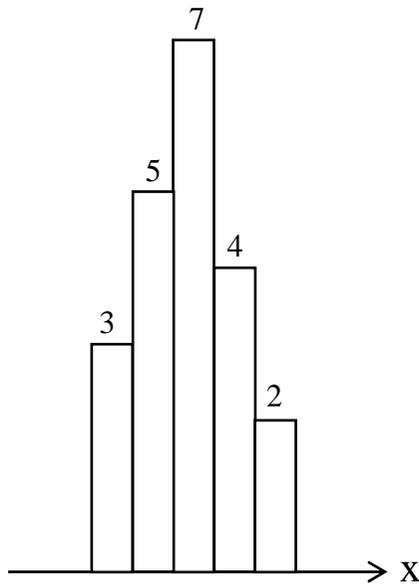
y, en estos dos últimos casos, hace falta aplicar procedimientos de estimación específicos, que veremos con detalle en la Unidad 8.



### Procedimientos de estimación de ddp

Tales procedimientos pueden ser de tipo:

- **Paramétrico:** se da por conocida la forma de la ddp, y se estiman sus parámetros (p. ej.: se admite gaussianidad, y se estiman media y varianza).
- **No paramétrico:** se aplica un modelo general, que puede aproximar cualquier tipo de ddp, y se ajusta de acuerdo con las observaciones disponibles.



Un ejemplo elemental son los histogramas, en los que, en una dimensión, se aproxima la ddp por barras en intervalos de valores de  $x$  cuya altura es igual al número de observaciones en cada intervalo.

(En realidad, habría que normalizar el área a 1)



- **Semiparamétrico:** se atribuye a la ddp una forma suficientemente general para que la aproximación sea buena y, al mismo tiempo, la expresión del estimador dependa de pocos parámetros (p. ej., una mezcla de gaussianas); con lo que se consigue cierto grado de no parametricidad, pero, a la vez, una representación razonablemente compacta (lo que resulta computacionalmente ventajoso).



### Problemas compuestos

Se denominan así aquellos (de estimación o decisión) en los que se dispone de la información estadística, salvo por un parámetro (escalar o vectorial). Un ejemplo es el de probabilidades “a priori” de las hipótesis desconocidas. Hay muchos casos en comunicaciones: desconocimiento del nivel de una señal, de la potencia del ruido, de la fase de una senoide, etc.

Son situaciones que propician aproximaciones de tipo semianalítico: su consideración nos permitirá evidenciar algunos aspectos importantes de la aplicación de tales métodos semianalíticos; lo haremos para el caso de decisión binaria: se habla entonces de hipótesis compuestas. (Naturalmente, siempre existe la alternativa de aplicar un método máquina).



## Hipótesis compuestas

A. Se desconoce un parámetro aleatorio  $y$

- caso de ser conocidas sus ddp condicionadas por las hipótesis,  $p(y | H_i)$ , si se calcula

$$p(\mathbf{x} | H_i) = \int_{(y)} p(\mathbf{x} | y, H_i) p(y | H_i) dy$$

se puede seguir minimizando el coste medio habitual;

- si no: pueden estimarse tales ddp condicionadas.



## B. Se desconoce un parámetro determinista $\mathbf{y}$

Como quiera que no hay forma de llegar a  $p(\mathbf{x} | H_i)$ , sólo tiene sentido recurrir al criterio de Neyman-Pearson, estrictamente hablando.

En este caso

- puede intentarse una estrategia minimax
- puede estimarse el parámetro bajo cada hipótesis  $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_0)$  y construir un test “Bayesiano” con tales estimaciones; así se tienen, p. ej., los **LRT Generalizados (GLRT)**

$$\Lambda_G(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | \hat{\mathbf{y}}_1, H_1)}{p(\mathbf{x} | \hat{\mathbf{y}}_0, H_0)} \underset{D_0}{\overset{D_1}{>}} \eta$$

de los que el que utiliza ML es el más habitual:

$$\Lambda_{GML}(\mathbf{x}) = \frac{\underset{\mathbf{y}}{\text{máx}} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, H_1)}{\underset{\mathbf{y}}{\text{máx}} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, H_0)} \underset{D_0}{\overset{D_1}{>}} \eta$$



### Discusión. Tests Uniformemente Más Potentes (UMPT)

Considérese el caso de los GLRT: es claro que sus prestaciones no pueden ser mejores que las del test diseñado con el conocimiento del valor verdadero de  $y$ ; por tanto, se trata, en general, de aproximaciones subóptimas.

Lo mismo cabe decir de la aplicación de cualquier otro método semianalítico: como quiera que se estiman valores o ddp, y tales estimaciones no se realizan para optimizar el decisor (o estimador) correspondiente al problema tratado, serán subóptimos.



Y, aunque es cierto que, p. ej., en el caso de estimaciones de la ddp es posible, tras realizarlas, entrenar (al modo máquina) sus parámetros de forma supervisada para realizar la función final de decisión o estimación, ya se ha fijado la arquitectura: y eso provoca carácter subóptimo.

Está claro, entonces, que los métodos máquina pueden ser preferibles en cuanto a prestaciones esperables: tanto más cuanto más “incertidumbres” haya en los procesos de estimación auxiliares de los métodos semianalíticos.



Volviendo al caso de los decisores para hipótesis compuestas con parámetro determinista desconocido: está claro que la mejor situación se daría cuando se pudiese diseñar el test completo, incluyendo la comparación con el umbral, sin conocer  $y$ : de existir, tal test se llama Uniformemente Más Potente.

Pero el UMPT no siempre existe; incluso en casos sencillos, como:

$$H_1: \quad x = y + r$$

$$H_0: \quad x = \quad r$$

con  $r \sim G(0, v)$ , e  $y$  parámetro determinista desconocido.



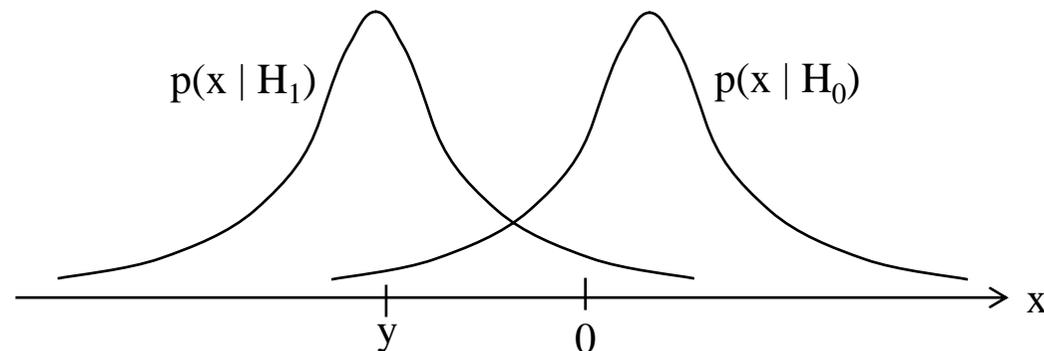
Procediendo como se hizo en la Unidad 2, se está tentado de proponer

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{>}} \lambda$$

y establecer  $\lambda$  mediante la condición

$$\int_{\lambda}^{\infty} p(r) dr = \alpha \quad (\leq P_{FA})$$

pero... lo propuesto sólo es válido si  $y$  toma sólo valores positivos: caso contrario, hay que invertir la comparación con el umbral





### Ejercicio de discusión

*D: Compare las fortalezas y debilidades de los métodos analíticos, semianalíticos y máquina.*

#### Analíticos

*\* fortalezas:*

- son de diseño directo*
- son estrictamente óptimos*

*\* debilidades:*

- gran sensibilidad a errores en la información estadística (poca robustez)*

#### Semianalíticos

*\* fortalezas:*

- consideran los datos*
- si se emplean estimaciones no paramétricas, son (relativamente) robustos*



\* *debilidades:*

- *no son óptimos: debido a las estimaciones en sí, y a la forma de parametrizar éstas*
- *necesitan un conjunto de datos representativos del problema*

*Máquina*

\* *fortalezas:*

- *consideran los datos*
- *se orientan al problema*

\* *debilidades*

- *los datos han de ser representativos*
- *ciertos objetivos (p. ej., mínima tasa de error) no son directamente incluibles en procesos de aprendizaje (supervisado) analíticos.*



### Recomendaciones finales

En muchas ocasiones, es posible proceder de modo que se minimicen los efectos de una elección indebida de método para resolver un problema, o de una mala aplicación: para ello, conviene confrontar resultados provenientes de diversas alternativas.

Así, por ejemplo:

- en un problema sin información estadística pueden aplicarse métodos semianalíticos y métodos máquina: la proximidad de resultados, aún no siendo una garantía absoluta, es indicio de que no se han cometido errores graves;



- un determinado modelo siempre se puede “validar” a partir de los datos: p. ej., si se supone una distribución gaussiana, una estimación de su ddp como mezcla de gaussianas a partir de los datos tiene que mostrar una componente dominante. Otro ejemplo: un diseño semianalítico tiene que comportarse de forma casi lineal para aceptar una arquitectura lineal como máquina para resolver el problema; etc.

La razonable aplicación de estos principios es extremadamente recomendable para la correcta proposición de decisores y estimadores.